

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Δευτέρα 13 Ιουνίου, 2016

1. (2 μονάδες) Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}_2[x]$, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

δίνεται ο υποχώρος $V = \langle 1, x + 1 \rangle$. Βρείτε:

- (α') μία ορθοκανονική βάση του V .
 - (β') την ορθογώνια προβολή του $x^2 + 1$ στον V και
 - (γ') το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V .
2. (2 μονάδες) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (α') Υποθέτουμε $\lambda_1 \lambda_3 \neq 0$ και $\lambda_1 \lambda_3 \neq (\lambda_2)^2$. Για ποιές τιμές των $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι ο A διαγωνίσιμος;
 - (β') Αν $\lambda_1 = 0$, για ποιές τιμές των λ_2, λ_3 είναι ο A διαγωνίσιμος;
3. (2 μονάδες) Εξετάστε αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -7/9 & 4/9 & 4/9 \\ 4/9 & -1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & -1/9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα κάθετο σ' αυτό. Αν ναι, να προσδιορίσετε τον άξονα και το συνημίτονο της γωνίας στροφής.

(Θέματα 4 και 5 στην πίσω σελίδα)

4. (2 μονάδες) Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$q(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 8z^2.$$

(α') Να βρεθεί ο πίνακας A της q . Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.

(β') Να βρεθεί συμμετρικός πίνακας $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ έτσι ώστε $B^2 = A$.

5. (2 μονάδες) Δίνεται ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

είναι διαγωνίσιμος.

(α') Βρείτε την σχέση μεταξύ των a, b .

(β') Δείξτε ότι

$$A^{2016} = 19A^{2014} - 30A^{2013}.$$

Καλή επιτυχία.